ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ – ΠΡΑΞΕΙΣ :

1) Στο σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$ να βρείτε τρεις σχέσεις που έχουν ακριβώς τις δύο από τις τρεις ιδιότητες:
• αναυλαστική , • συμμετρική , • μεταβατική

ΛΥΣΗ

Αναζητώ τις τρεις ακόλουθες σχέσεις:

$R_1 \subseteq A\times A$ και όχι αναυλαστική
$R_2 \subseteq A\times A$ και όχι συμμετρική
$R_3 \subseteq A\times A$ και όχι μεταβατική

Οι R_1, R_2, R_3 όχι απαραίτητα μοναδικές σχέσεις.

Έτσι,

$R_1 = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$ Παρόλο που $(4,4)\in R_1$ το $(1,1)\notin R_1$

$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,1),(1,3),(4,3)\}$ $(4,1)\in R_2 \not\Rightarrow (1,4)\in R_2$

$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}$ $(1,2)\in R_3$ και $(2,4)\in R_3$ αλλά $(1,4)\notin R_3$

2) Στο σύνολο $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ορίζεται η σχέση $(a,b)R(c,d)$ εάν $a\cdot d=b\cdot c$. Να εξετάσετε αν είναι σχέση ισοδυναμίας

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε τις ιδιότητες:

1. $(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a\cdot b=a\cdot b \quad ,\forall a,b\in\mathbb{Z}$ ισχύει
2. $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c \Leftrightarrow c\cdot b=d\cdot a \Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$
3. $(a,b)R(c,d)$ και $(c,d)R(e,f) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$ και $c\cdot f=d\cdot e \xLeftrightarrow[\text{κατά μέλη}]{\text{πολ/ζουμε}}$

$\Leftrightarrow a\cdot d\cdot c\cdot f=b\cdot c\cdot d\cdot e$.

- Αν $d\neq 0$ και $c\neq 0$ τότε $af=b\cdot e \Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$
- Αλλά είναι προφανές ότι μπορεί να υπάρξει περίπτωση που να μην ισχύει η μεταβατική ιδιότητα.

Άρα, δεν αποτελεί σχέση ισοδυναμίας (στο $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ όμως, και μάλιστα το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας είναι το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$)

3) Στον $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη σχέση $r_1 R r_2 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2 \geq 0$. Είναι αυτή η σχέση, μια σχέση ισοδυναμίας;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Εξετάζουμε τις ιδιότητες:

i. $\forall r_1 \in \mathbb{R}$: $r_1 R r_1 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_1 \geq 0 \Leftrightarrow r_1^2 \geq 0$ ισχύει

ii. εαν $r_1 R r_2 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2 \geq 0 \Leftrightarrow r_2 \cdot r_1 \geq 0 \Leftrightarrow r_2 R r_1$

iii. εάν $r_1 R r_2$ και $r_2 R r_3 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2 \geq 0$ και $r_2 \cdot r_3 \geq 0 \overset{?}{\not\Rightarrow}$

$\overset{?}{\not\Rightarrow} r_1 \cdot r_3 \geq 0$.

?: α. Αν $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ τότε ισχύει η ισότητα.

β. Αν $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ και $r_3 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 \cdot r_2 = 0$ και $r_2 \cdot r_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 \cdot r_3 = -2 < 0$. δεν ισχύει η μεταβατική

Αρα, γενικά η σχέση δεν είναι σχέση ισοδυναμίας

4) Εστω $f: X \to Y$ απεικόνιση. Στο σύνολο X ορίζουμε μια σχέση : $x_1 R x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Να δείξετε ότι αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας και έπειτα να βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αποδεικνύουμε τις ιδιότητες:

i. $x_1 R x_1 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_1)$ ισχύει $\forall x_1 \in X$

ii. $x_1 R x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1) \Leftrightarrow x_2 R x_1$

iii. $x_1 R x_2$ & $x_2 R x_3 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ & $f(x_2) = f(x_3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_3) \Leftrightarrow x_1 R x_3$. (Σχέση ισοδυναμίας)

$\overline{x_1} = \{$ τα ισοδύναμα του $x_1\} = \{x \in X : x R x_1 \Leftrightarrow f(x) = f(x_1)\}$

ή ισοδύναμα

$\overline{x_1} = f^{-1}(\{f(x)\})$.

5) Στο σύνολο $\mathbb{C}$ ορίζεται η σχέση:

$\alpha R b \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και έπειτα να βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αποδεικνύουμε τις ιδιότητες

- $\alpha R \alpha \Leftrightarrow a-a=0 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{C}$
- αν $\alpha R b \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow bRa$ (αντίθετος)
- αν $\alpha R b$ και $bRc \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{R}$ και $b-c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-b+b-c = a-c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow aRc$. (Σχέση ισοδυναμίας)

Προφανώς το μιγαδικό i είναι αυτό που καθορίζει τις παρακάτω κλάσεις ισοδυναμίας.

Επιθυμούμε $\forall a,b \in \mathbb{C}: aRb \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{R}$

Έστω λοιπόν οι μιγαδικοί:

$a = x+yi$ και $b = z+wi$ τότε

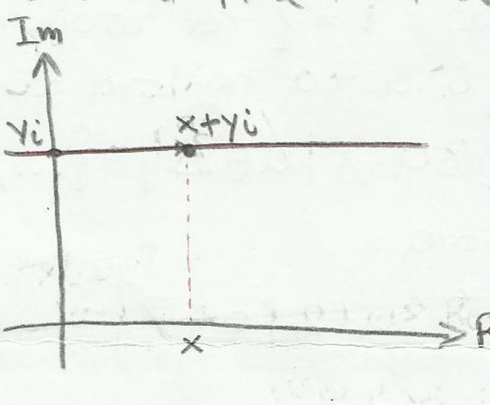
$(x+yi)R(z+wi) \Leftrightarrow (x-z)+(y-w)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{y=w}$

Δηλαδή, όπως προαναφέρθηκαμε οι κλάσεις καθορίζονται <u>μόνο</u> από το φανταστικό μέρος του μιγαδικού και δίνονται από:

$\overline{bi} = \{x+bi \;/\; x \in \mathbb{R}\}$.

Έτσι, $\forall b$ έχουμε μια διαφορετική κλάση

Προφανώς, οι κλάσεις θα είναι παράλληλες στον πραγματικό άξονα



6) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε την εξής σχέση:

$nRk \Leftrightarrow n-k$ διαιρείται του 3

α. Να εξετάσετε εαν είναι σχέση ισοδυναμίας

β. Στη συνέχεια να βρείτε ποια στοιχεία του $\mathbb{Z}$ είναι ισοδύναμα με το:

i. μηδέν , ii. ένα και iii. δύο

ΛΥΣΗ

α. Εξετάζουμε:

i. $(\forall n \in \mathbb{Z})$: $nRn \Leftrightarrow n-n=0$ διαιρείται του 3

ii. Αν $nRk \Leftrightarrow n-k$ διαιρ. του 3 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k-n$ διαιρ. του 3 $\Leftrightarrow kRn$

iii. Αν nRk και $kRl \Leftrightarrow n-k$ και $k-l$ διαιρ. του 3

$\Leftrightarrow n-\cancel{k}+\cancel{k}-l = n-l$ διαιρ. του 3

(Σχέση ισοδυναμίας)

β. i. $0Rk \Leftrightarrow 0-k=3a \Leftrightarrow k=3\cdot(-a)$

(βέβαια και $kR0 \Leftrightarrow k-0=3a \Leftrightarrow k=3a$)

Άρα, $\overline{0}=\{$τα ισοδύναμα του $0\}=$

$=\{$όλα τα πολλ/σια του $3\}=\{3a \mid a\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm3,\pm6,\dots\}$

ii. $1Rk \Leftrightarrow 1-k=3a \Leftrightarrow k=1+3(-a)$

(βέβαια και $kR1 \Leftrightarrow k-1=3a \Leftrightarrow k=1+3a$)

Άρα, $\overline{1}=\{$τα ισοδύναμα του $1\}=$

$=\{$όλα τα πολλ/σια του 3 συν $1\}=$

$=\{3a+1 \mid a\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-5,-2,1,4,7,\dots\}$

iii. όμοια:

$\overline{2}=\{3a+2 \mid a\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-4,-1,2,5,8,\dots\}$.

7) Στο σύνολο $\mathbb{R}$, ορίζεται η πράξη $a \oplus b = 2(a+b)$.
Να αποδείξετε ότι η πράξη αυτή δεν είναι προσεταιριστική και δεν έχει ουδέτερο στοιχείο. Είναι αυτή η πράξη ομάδα;

ΛΥΣΗ

Στο 1ο μέλος: $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (2(b+c)) = 2(a + 2(b+c)) =$
$= 2a + 4b + 4c \quad (1)$.

Στο 2ο μέλος: $(a \oplus b) \oplus c = (2(a+b)) \oplus c = 2(2(a+b)+c) =$
$= 4a + 4b + 2c \quad (2)$

Ισχύει $(1) \neq (2)$ (όχι προσεταιριστική)

Υποθέτουμε, έπειτα ότι έχει ουδέτερο στοιχείο (e):
$a \oplus e = e \oplus a = a$

Από το 1ο μέλος παίρνουμε:
$a \oplus e = 2(a+e) = a \Rightarrow 2a + 2e = a \Rightarrow a = -2 \cdot e \Rightarrow e = -\frac{a}{2}$
Άτοπο

Δεν έχει ουδέτερο στοιχείο διότι το e εξαρτάται από τη μεταβλητή a. (όχι ομάδα)

8) Στο σύνολο $\mathcal{F}$ των πραγματικών συναρτήσεων ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:
$f \oplus g = f+g$ και $f \odot g = f \circ g$
Να εξετάσετε εάν τα ζεύγη $(\mathcal{F}, \oplus)$ & $(\mathcal{F}, \odot)$ αποτελούν ομάδες.

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε προσεταιριστικότητα, ουδέτερο στοιχείο και αντίστροφο-αντίθετο στοιχείο για το σύνολο $\mathcal{F}$ των πραγματικών συναρτήσεων. ($\mathcal{F} = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτ.$\}$)

• Προσεταιριστικότητα:

1ο μέλος: $(f \oplus g)(x) \oplus h(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x)+g(x)+h(x)$

2ο μέλος: $f(x) \oplus (g \oplus h)(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x)+g(x)+h(x)$

Ισχύει η προσεταιριστικότητα

• Ουδέτερο στοιχείο: Έχει και μάλιστα είναι η $O(x)=0$. στην πραγματική ευθεία

• Αντίθετο στοιχείο: Θα πρέπει $(f+g)(x) = (g+f)(x) = O(x)$ προφανώς το αντίθετο της f είναι $g=-f$.

Άρα, το ζεύγος $(\mathcal{F}, \oplus)$ αποτελεί ομάδα

Όσο για την πράξη $\odot$ εξετάζουμε τις ιδιότητες:

• Προσεταιριστικότητα

1ο μέλος: $(f \odot g) \odot h = (f \circ g) \circ h = (f \circ g)(h(x)) =$
$= f(g(h(x)))$

2ο μέλος: $f \odot (g \odot h) = f \circ (g \circ h) = f(g(h(x)))$

Ισχύει η προσεταιριστικότητα.

• Ουδέτερο στοιχείο (ή Μοναδιαίο):
Θα πρέπει $(f \odot T)(x) = f(x)$. Έτσι, για $T(x)=x$
Άρα, $(f \odot T)(x) = f(T(x)) = f(x) = (T \odot f)(x)$
Επομένως, έχει ουδέτερο (ή μοναδιαίο) στοιχείο την ταυτοτική συνάρτηση

• Αντίστροφο στοιχείο:
Θέλουμε $(g \odot f) = T = (f \odot g) \Leftrightarrow g(f(x)) = T(x) = x = f(g(x))$
Άρα, κάθε συνάρτηση δεν έχει αντίστροφη

Άρα, το ζεύγος $(\mathcal{F}, \odot)$ δεν αποτελεί ομάδα